http://dx.doi.org/10.29092/uacm.v16i41.717

Sobre un método de árboles para la lógica de términos numérica

José Martín Castro-Manzano*

Resumen. En esta contribución proponemos un método de árboles para la lógica de términos numérica de Murphree. El resultado es un método analítico de árboles para la lógica proposicional, la silogística apodíctica, la silogística relacional, la silogística intermedia y la silogística numérica.

Palabras clave. Árboles semánticos, lógica de términos, cuantificadores no-clásicos.

On a Tableaux Method for Numerical Term Logic

Abstract. In this contribution we propose a tableaux method for Murphree's Numerical Term Logic. The result is an analytic tableaux method for propositional logic, apodictic syllogistic, relational syllogistic, intermediate syllogistic, and numerical syllogistic.

Key words. Semantic trees, term logic, non-classical quantifiers.

Introducción

En otro lugar hemos propuesto una unión del sistema *Term Functor Logic* (Sommers, 1967, 1984; Sommers y Englebretsen, 2000; Englebretsen, 1987, 1996; Englebretsen y Sayward, 2011) con la silogística intermedia (Peterson, 1979; Thompson, 1982). Dicha unión estaba motivada porque la lógica de términos functoriales (TFL, por *Term Functor Logic*)

*Profesor investigador en la Facultad de Filosofía en la UPAEP, del estado de Puebla, México. Correo electrónico: josemartin.castro@upaep.mx

ofrece una aproximación algebraica para la silogística que, desafortunadamente, no modela casos de razonamiento en lenguaje natural con cuantificadores no-clásicos como "muchos," "la mayoría," o "pocos;" mientras que, por otro lado, la silogística intermedia extiende el alcance de la silogística mediante la adición de cuantificadores no-clásicos pero carece de un tratamiento algebraico. De la unión de estos sistemas resultó la lógica de términos functoriales intermedia (TFL^{+}, por *Intermediate Term Functor Logic*), un sistema capaz de modelar inferencia silogística con las ventajas de un enfoque algebraico (*i.e.*, la reducción de conjunto de reglas complejas a un sistema simple, formal y unificado) y las ventajas de una teoría silogística con cuantificadores no-clásicos (*i.e.*, la evaluación de una amplia gama de patrones inferenciales en lenguaje natural que extiende las capacidades de la silogística apodíctica tradicional).

Adicionalmente, en otro trabajo hemos propuesto un método analítico de árboles para el sistema TFL (Castro-Manzano y Reyes-Cárdenas, 2018). Este método de árboles estaba motivado porque no existía un sistema de árboles para TFL capaz de preservar la riqueza expresiva y el poder inferencial del álgebra de Sommers y Englebretsen (cf. D'Agostino, 2011; Sommers y Englebretsen, 2000, p. 183ss; Priest, 2008). Esta propuesta resultó en un método de prueba que reduce el número de reglas de inferencia y preserva las capacidades expresivas e inferenciales de TFL para la silogística apodíctica, la silogística relacional y la lógica proposicional. Aprovechando estos resultados, en otro trabajo hemos desarrollado, a modo de síntesis, un método de árboles para la silogística intermedia usando las nociones del álgebra de TFL. El resultado fue un método analítico de árboles para el sistema TFL^{+} capaz modelar inferencia en lógica proposicional, silogística apodíctica, relacional e intermedia.

Pues bien, al reconsiderar los resultados anteriores y las propiedades de la lógica de términos numérica (NTL, por *Numerical Term Logic*) de Murphree (1998) observamos una conexión natural entre los trabajos mencionados previamente y NTL en la medida en que TFL y TFL^{+}, como veremos, son sublógicas de NTL. Así pues, basados en esta conexión y en los avances previamente mencionados, en este trabajo ofrecemos un método analítico de árboles para el sistema NTL. El resultado,

http://dx.doi.org/10.29092/uacm.v16i41.717

así, es un método analítico de árboles para la lógica proposicional, la silogística apodíctica, la silogística relacional, la silogística intermedia y, por supuesto, la silogística numérica. Para alcanzar este resultado procedemos de la siguiente manera: primero presentamos, de manera breve, los sistemas TFL y NTL (con especial énfasis en la silogística), posteriormente introducimos nuestra contribución y, al final, mencionamos algunos posibles usos de este método.

Los sistemas SYLL, TFL y NTL

Aspectos generales de la silogística

La silogística asertórica (SYLL) es una lógica de términos que tiene sus orígenes en los *Primeros Analíticos* de Aristóteles y estudia la relación de inferencia entre proposiciones categóricas. Una proposición categórica es una proposición compuesta por dos términos, una cantidad y una cualidad. El sujeto y el predicado de la proposición se llaman términos: el término-esquema S denota el término sujeto de la proposición y el término-esquema P denota el predicado. La cantidad puede ser universal (*Todo*) o particular (*Algún*) y la cualidad puede ser afirmativa (*es*) o negativa (*no es*). Estas proposiciones categóricas se denotan mediante una etiqueta (a (para la universal afirmativa, SaP), e (para la universal negativa, SeP), i (para la particular afirmativa, SiP), y o (para la particular negativa, SoP)) que nos permite determinar una secuencia de tres proposiciones que se conoce como modo. Un silogismo categórico, entonces, es un modo ordenado de tal manera que dos proposiciones fungen como premisas y la última como conclusión. Al interior de las premisas existe un término que ocurre en ambas premisas pero no en la conclusión: este término especial, usualmente denotado con el término-esquema M, funciona como un enlace entre los términos restantes y es conocido como término medio. De acuerdo a la posición del término medio se pueden definir cuatro arreglos o figuras que codifican los modos o patrones silogísticos válidos (Cuadro 1[1]).

[1] Por mor de brevedad, pero sin pérdida de generalidad, omitimos los silogismos que requieren carga existencial.

http://dx.doi.org/10.29092/uacm.v16i41.717

Primera Figura	Segunda Figura	Tercera Figura	Cuarta Figura
aaa eae aii eio	eae aee eio aoo	iai aii oao eio	aee iai eio

Cuadro 1. Modos silogísticos válidos

Aspectos generales de la lógica de términos functoriales

Sommers y Englebretsen han desarrollado un álgebra, la *Term Functor Logic* o lógica de términos functoriales (TFL), que representa la silogística usando términos en lugar de elementos lingüísticos de primer orden como variables individuales o cuantificadores.[2] De acuerdo con esta álgebra, las cuatro proposiciones categóricas pueden representarse mediante la siguiente sintaxis:[3]

- SaP =: -S+P = -S-(-P) = -(-P)-S = -(-P)-(+S)
- SeP =: -S-P = -S-(+P) = -P-S = -P-(+S)
- SiP =: +S+P = +S-(-P) = +P+S = +P-(-S)
- SoP =: +S-P = +S-(+P) = +(-P)+S = +(-P)-(-S)

Dada esta representación, TFL ofrece una regla para la silogística: una conclusión se sigue válidamente de un conjunto de premisas si y sólo si *i*) la suma de las premisas es algebraicamente igual a la conclusión y *ii*) el número de conclusiones con cantidad particular (viz., cero o uno) es igual al número de premisas con cantidad particular (Englebretsen, 1996, p. 167). Así, por ejemplo, si consideramos un silogismo válido,

2 Que podemos modelar inferencias sin elementos lingüísticos de primer orden como variables o cuantificadores no es una novedad (cf. Quine, 1971; Noah, 1980; Kuhn, 1983), pero el proyecto lógico de Sommers tiene un impacto más amplio: que podamos usar una lógica de términos en lugar de un sistema de primer orden no tiene que ver con el hecho sintáctico, por decirlo de un modo, de que podemos modelar inferencia sin variables o cuantificadores, sino con la perspectiva de que el lenguaje natural es una fuente de lógica natural (cf. Sommers, 1982; Sommers, 2005; Moss, 2015).

3 En lo que sigue usamos la presentación de Englebretsen (1996).

http://dx.doi.org/10.29092/uacm.v16i41.717

digamos un silogismo tipo aaa de la primera figura (i.e., aaa-1), podemos ver cómo la aplicación de este método produce la conclusión correcta (Cuadro 2).

	Proposición	Representación
1.	Todos los mamíferos son animales.	-M+A
2.	Todos los perros son mamíferos.	-P+M
⊢	Todos los perros son animales.	-P+A

Cuadro 2. Un silogismo tipo aaa-1

En el ejemplo anterior podemos ver claramente cómo es que funciona este método: *i*) si sumamos las premisas obtenemos la expresión algebraica (−M+A)+(−P+M)=−M+A−P+M=−P+A, de tal modo que la suma de las premisas es algebraicamente igual a la conclusión, y la conclusión es igual a −P+A, en lugar de +A−P, porque por la condición *ii*) el número de conclusiones con cantidad particular (cero en este ejemplo) es igual al número de premisas con cantidad particular (cero en este ejemplo).

Esta aproximación algebraica es capaz de representar y modelar proposiciones relacionales, singulares y compuestas sin perder su motivación principal, a saber, que una inferencia es un proceso que ocurre entre términos. Así, por ejemplo, los siguientes casos ilustran cómo representar inferencias con proposiciones relacionales (Cuadro 3), singulares[4] (Cuadro 4), o compuestas[5] (Cuadro 5).[6]

[4] Asumiendo que los términos singulares, como *Sócrates*, se representan con letras minúsculas.

[5] Dado que las proposiciones compuestas (*i.e.* proposiciones de lógica proposicional) pueden ser representadas del siguiente modo, P:=+[p], Q:=+[q], ¬P:=-[p], P⇒Q:=-[p]+[q], P∧Q:=+[p]+[q] y P∨Q:=--[p]--[q], el método de decisión se comporta como resolución binaria (cf. Noah, 2005).

[6] Estos ejemplos están diseñados para ilustrar que TFL es capaz de modelar las mismas inferencias que la lógica clásica de primer orden es capaz de modelar; sin embargo, todavía es posible argumentar que, en cierto sentido, TFL es más expresiva que la lógica clásica de primer orden (cf. Englebretsen, 1996, p.172ss).

http://dx.doi.org/10.29092/uacm.v16i41.717

	Proposición	Representación
1.	Algunos caballos son más rápidos que algunos perros.	$+C_1+(+R_{12}+P_2)$
2.	Los perros son más rápidos que algunos hombres.	$-P_2+(+R_{23}+H_3)$
3.	Lo que es más rápido que lo que es más rápido que los hombres, es más rápido que los hombres.	$-(+R_{12}+(+R_{23}+H_3))+(+R_{13}+H_3)$
$\vdash$	Algunos caballos son más rápidos que algunos hombres.	$+C_1+(+R_{13}+H_3)$

Cuadro 3. Ejemplo con proposiciones relacionales

	Proposición	Representación
1.	Todo hombre es mortal.	-H+M
2.	Sócrates es hombre.	+s+H
$\vdash$	Sócrates es mortal.	+s+M

Cuadro 4. Ejemplo con proposiciones singulares

	Proposición	Representación
1.	Si eres Sócrates, entonces eres amigo de Platón.	-[s]+[p]
2.	Eres Sócrates.	+[s]
$\vdash$	Eres amigo de Platón.	+[p]

Cuadro 5. Ejemplo con proposiciones compuestas

Aspectos generales de la lógica de términos numérica

De acuerdo con Szabolcsi (2008, p.3), la cuantificación en los sistemas típicos de primer orden es “extremista” en el sentido de que está limitada a representar dos extremos: o bien todo (cuantificador universal) o bien algo (cuantificador existencial).[7] Pero este extremismo no está claramente justificado, especialmente si un sistema lógico pretende

[7] Contamos, además, con las propuestas de Mostowski (1957), Lindström (1966), Ben-Yami (2014) y Moss (2015) para lidiar con cuantificadores generalizados, pero como estas formulaciones están diseñadas con y para lenguajes de primer orden, omitimos su tratamiento en este trabajo.

http://dx.doi.org/10.29092/uacm.v16i41.717

representar razonamiento en lenguaje natural. En efecto, es usual encontrar manuales de lógica que, frente al problema de la multiplicidad de cuantificadores no universales, suponen que los cuantificadores subjetivos (Szabolcsi, 2008, p.26ss) como "muchos," "la mayoría," o "pocos" (cf. Peterson, 1979; Thompson, 1982), justamente por no ser universales, deben ser tratados como simples casos del cuantificador existencial.

Sin embargo, no es del todo claro por qué esto último debería ser así. Consideremos, por ejemplo, un caso sencillo. Digamos que admitimos que *La mayoría de argentinos son hispanohablantes.* Esta última proposición es, en efecto, una proposición particular, tal y como lo es la proposición *Algunos argentinos son hispanohablantes*, pero claramente la primera no admite conversión y, por tanto, no puede ser equivalente a la segunda. Notemos que si *Algunos argentinos son hispanohablantes* entonces, seguramente, *Algunos hispanohablantes son argentinos*, pero *La mayoría de argentinos son hispanohablantes* no implica que *La mayoría de hispanohablantes son argentinos.* Luego, es un error mayor suponer que cuantificadores alternativos como "muchos," "la mayoría," o "pocos," por no ser universales, deben ser tratados como casos del cuantificador existencial sin más.

Pero además, la cuantificación no está restringida a los caprichos de los cuantificadores subjetivos, ya que es común hacer uso de cantidades numéricas específicas. En efecto, podemos notar, por ejemplo, que la proposición *Algunos argentinos son hispanohablantes* mantiene una diferencia expresiva clara si la comparamos con la proposición *Más de 430,000 argentinos son hispanohablantes.* Ciertamente, si *Más de 430,000 argentinos son hispanohablantes* entonces también debe ser verdad que *Algunos argentinos son hispanohablantes*, pero no a la inversa. Consecuentemente, también sería un descuido suponer que los cuantificadores con cantidades numéricas específicas deben ser tratados como casos del cuantificador existencial sin más. Y si bien podríamos añadir más ejemplos para ilustrar este punto, estos bastan para mostrar la importancia de diseñar un sistema que, además de ser cercano al lenguaje natural, tenga capacidades expresivas e inferenciales suficientes para modelar una gran variedad de cuantificadores. Dada esta demanda, Murphree (1991, 1998) y Szabolcsi (2008) desarrollaron sendos siste-

http://dx.doi.org/10.29092/uacm.v16i41.717

mas terminísticos y numéricos basados en el álgebra de Sommers. En este trabajo, sin embargo, usamos únicamente el sistema de Murphree (1998).

El sistema NTL de Murphree es, pues, un sistema terminístico capaz de modelar inferencia con cuantificadores alternativos, especialmente numéricos. Así, NTL añade una serie de consideraciones aritméticas al álgebra de TFL mediante una sintaxis que permite representar una gran variedad de cuantificadores y una modificación del álgebra de Sommers que permite modelar procesos inferenciales con cuantificadores numéricos. Así pues, NTL ofrece la siguiente sintaxis para las proposiciones numéricamente cuantificadas:

Proposición	NTL	Proposición	NTL
Todos excepto *n* S son P	$-_n S+P$	A lo mucho *n* S son P	$-_n S-P$
Por lo menos *n* S son P	$+_n S+P$	Por lo menos *n* S no son P	$+_n S-P$

Cuadro 6. Sintaxis de NTL

A modo de ejemplo, consideremos algunas proposiciones numéricas:

1. Por lo menos 15 estudiantes son demócratas := $+_{15}E+D$
2. Todos excepto 125 estudiantes van a reprobar := $-_{125}E+R$
3. A lo mucho 150,000 estudiantes son adultos := $-_{150,000}E-A$
4. Hay al menos 23 adultos := $+_{23}A+A$
5. Por lo menos 15 estudiantes no son demócratas := $+_{15}E-D$

En este punto es interesante notar que cuando n=0 (n=1) las proposiciones categóricas tradicionales universales (particulares) quedan incluidas en NTL, como en los siguientes ejemplos, y por tanto las proposiciones de TFL son proposiciones de NTL:

6. Todo S es P := $-_0S+P$
7. Ningún S es P := $-_0S-P$
8. Algún S es P := $+_1S+P$
9. Algún S no es P := $+_1S-P$

http://dx.doi.org/10.29092/uacm.v16i41.717

Pero además, adaptando algunas ideas de Szabolcsi, en NTL podemos representar cuantificadores exactos (10 y 11), comparativos (12 y 13), fraccionarios (14 y 15) y subjetivos (16 y 17) (estos dos últimos ejemplos ilustran cómo es que las proposiciones de TFL+ son proposiciones de NTL):

10. Exactamente *n* S son P := $+(+_{n-1}S+P)+(-_{n}S-P)$
11. Exactamente *n* S no son P := $+(+_{n-1}S-P)+(+_{n}S+P)$
12. Más S que M son P:= $+(+(+_{n-1}S+P)+(-_{n}S-P))+(+(+_{m-1}M+P)+(-_{m}M-P))+m>n$
13. Menos S que P son M := $+(+(+_{n-1}S+P)+(-_{n}S-P))+(+(+_{m-1}S+M)+(-_{m}S-M))+m<n$
14. A lo sumo *k/n* de S son P := $-_{k/n}S-P$
15. Todos excepto *k/n* de S son P := $-_{k/n}S+P$
16. Muchos S son P := $+_{m}S+P$
17. Muchos S no son P := $+_{m}S-P$

Pues bien, dadas estas nuevas consideraciones sintácticas, NTL modifica la regla de TFL como sigue: una conclusión se sigue válidamente de un conjunto de premisas si y sólo si *i*) la suma de las premisas es algebraicamente igual a la conclusión, *ii*) el número de conclusiones con cantidad particular (viz., cero o uno) es igual al número de premisas con cantidad particular y *iii*) o bien (a) el valor de una conclusión universal resulta de sumar los valores de las premisas universales; o bien (b) el valor de una conclusión particular resulta de restar el valor de la premisa universal del valor de la premisa particular.[8] Para ejemplificar este método consideremos algunas inferencias válidas (Cuadros 7 al 13).

	Proposición	Representación
1.	Todo chileno es listo.	$-_{0}C+L$

[8] Esta última consideración es distinta de la de Szabolcsi, para quien la suma de los cuantificadores numéricos de las premisas tiene que ser igual o mayor al cuantificador numérico de la conclusión (cf. Szabolcsi, 2008, p.45).

http://dx.doi.org/10.29092/uacm.v16i41.717

2.	Todos excepto 15 filósofos son chilenos.	$-_{15}F+C$
$\vdash$	Todos excepto 15 filósofos son listos.	$-_{15}F+L$

Cuadro 7. Un silogismo numérico válido en NTL (adaptado de (Murphree, 1998))

	Proposición	Representación
1.	Todos excepto 11 anarquistas son lógicos.	$-_{11}A+L$
2.	Por lo menos 30 mexicanos son anarquistas.	$+_{30}M+A$
$\vdash$	Por lo menos 19 mexicanos son lógicos.	$+_{19}M+L$

Cuadro 8. Un silogismo numérico válido en NTL (adaptado de (Murphree, 1998))

Ahora bien, para alcanzar nuestra meta, es necesario hacer una modificación mínima a la sintaxis de NTL como sigue (Cuadro 9), añadiendo al predicado la convención de un entero positivo arbitrario "e" mayor que cualquier otro entero:

Proposición	NTL	Proposición	NTL
Todos excepto *n* S son P	$-_nS+_eP$	A lo mucho *n* S son P	$-_nS-_eP$
Por lo menos *n* S son P	$+_nS+_eP$	Por lo menos *n* S no son P	$+_nS-_eP$

Cuadro 9. Modificación de la sintaxis de NTL

Esta modificación es necesaria para manejar con claridad el funcionamiento de los árboles, como veremos más adelante. Las inferencias en NTL se verían, entonces, como sigue.

	Proposición	Representación
1.	Todos excepto 6 colombianos son latinos.	$-_6C+_eL$
2.	Todos excepto 20 samarios son colombianos.	$-_{20}S+_eC$
$\vdash$	Todos excepto 26 samarios son latinos.	$-_{26}S+_eL$

Cuadro 10. Un silogismo numérico válido en NTL (adaptado de (Szabolcsi, 2008, p. 47))

http://dx.doi.org/10.29092/uacm.v16i41.717

	Proposición	Representación
1.	Todos menos 3 maestros regalaron 5 libros a todos los estudiantes excepto 4.	$-_3T+(+(+_eG+_5B)-_4S)$
2.	Todos menos 2 maestros son mal pagados.	$-_2T+_eU$
3.	Los libros son caros.	$-_0B+_eE$
4.	Todos menos 7 estudiantes son ingratos.	$-_7S+_eI$
5.	Hay al menos 50 estudiantes.	$+_{50}S+_eS$
6.	Hay al menos 10 maestros.	$+_{10}T+_eT$
⊢	Al menos 5 personas mal pagadas regalaron 4 objetos caros a 38 ingratos.	$+_5U+(+(+_eG+_4E)+_{38}I)$

Cuadro 11. Un silogismo relacional y numérico válido en NTL (adaptado de (Murphree, 1998))

	Proposición	Representación
1.	Todos excepto 3 actores tienen más de 18 contratos.	$-_3A+(+_eT+_{18}C)$
2.	A lo mucho 8 californianos no son actores.	$-_8F+_eA$
3.	Exactamente 6 contratos no son lucrativos.	$+(+_5C-_eL)+(-_6C+_eL)$
⊢	Todos excepto 11 californianos tienen más de 12 objetos lucrativos.	$-_{11}F+(+_eT+_{12}L)$

Cuadro 12. Un silogismo relacional y numérico válido en NTL (adaptado de (Szabolcsi, 2008, p.52))

	Proposición	Representación
1.	La mayoría de la gente es feliz.	$-_mG+_eF$
2.	Todos los que son felices son tontos.	$-_0F+_eT$
⊢	La mayoría de gente es tonta.	$-_mG+_eT$

Cuadro 13. Un silogismo intermedio válido en NTL (adaptado de (Szabolcsi, 2008, p. 53))

Con estos elementos, a continuación proponemos un método de árboles para NTL.

http://dx.doi.org/10.29092/uacm.v16i41.717

Árboles para NTL

Como es usual, y siguiendo a (D'Agostino 2011; Priest, 2008), decimos que un árbol es un grafo conectado acíclico definido por nodos y vértices. El nodo superior es la raíz. Los nodos inferiores son puntas u hojas. Cualquier camino desde la raíz hasta una punta es una rama. Para probar la validez de una inferencia se construye un árbol que comienza con una única rama cuyos nodos son premisas y la negación de la conclusión: esta es la lista inicial. Entonces se aplican las reglas que nos permiten extender la lista inicial:

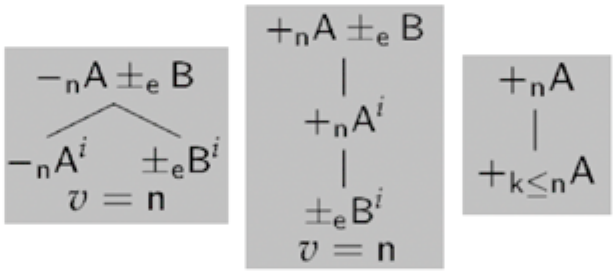


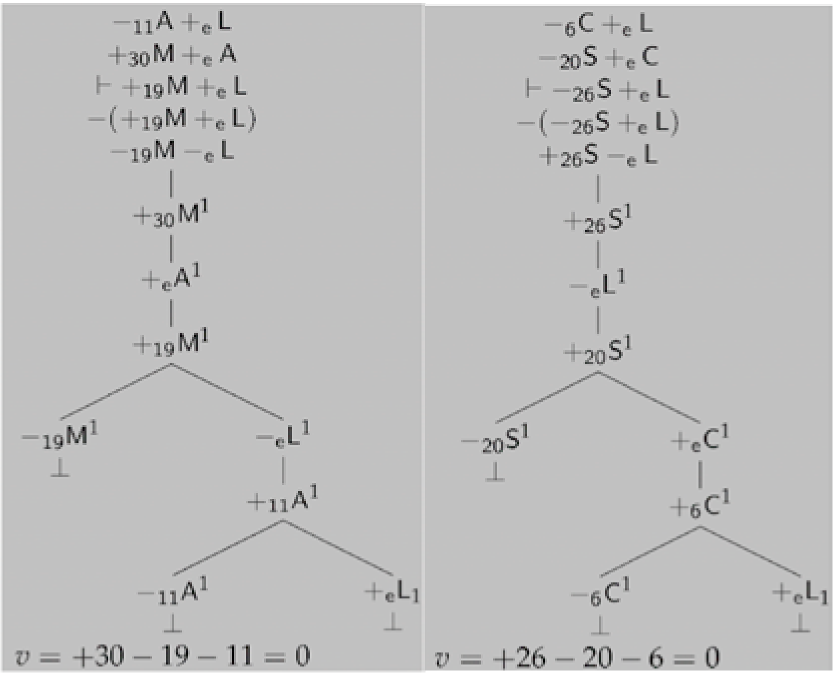
Diagrama 1 **Diagrama 2** **Diagrama 3**

El Diagrama 1 ilustra la regla para las proposiciones de tipo universal (*i.e.*, aquellas cuyo primer término es "-"); el Diagrama 2, la regla para las proposiciones de tipo particular (*i.e.*, aquellas cuyo primer término es "+"). Después de aplicar cada regla introducimos un índice $i \in \{1, 2, 3, \ldots\}$ y generamos un vector de valores *v* con el número n del término asociado. Para las proposiciones de tipo universal, el índice puede ser cualquier natural; para las proposiciones de tipo particular, el índice tiene que ser un nuevo natural si dichas proposiciones no tienen ya un índice asociado. El Diagrama 3 es una regla de ordenamiento para términos atómicos con signo "+". Adicionalmente, y siguiendo los principios de TFL, asumimos las siguientes reglas de negación: $-(\pm A) = \mp A$, $-(\pm A \pm B) = \mp A \mp B$ y $-(--A--A) = +(-A)+(-A)$.

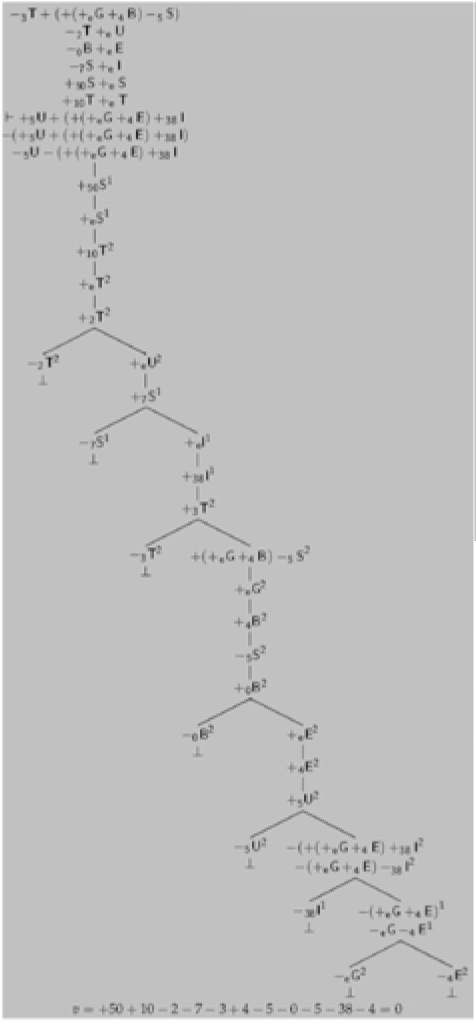
Como es costumbre, decimos que un árbol es completo si y sólo si toda regla que puede ser aplicada ha sido aplicada. Una rama es cerrada

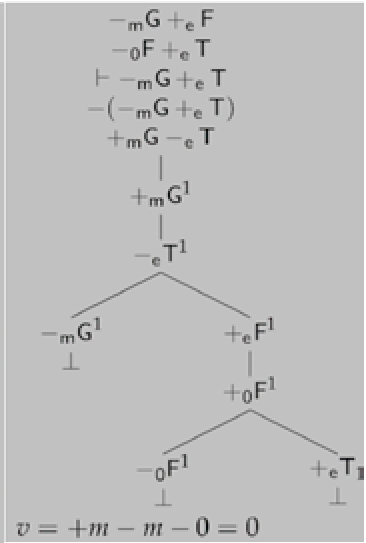
http://dx.doi.org/10.29092/uacm.v16i41.717

si y sólo si hay términos de la forma $\pm^{n}A^{i}$ y $\mp^{n}A^{i}$ en dos de sus nodos; de otro modo es abierta. Una rama cerrada se indica escribiendo $\perp$ en su punta; una rama abierta se indica escribiendo ∞. Un árbol es cerrado si y sólo si todas sus ramas son cerradas; de otro modo es abierta. Y por último, diremos que A es una consecuencia lógica de un conjunto de premisas Γ (*i.e.*, $\Gamma \vdash A$) si y sólo si existe un árbol completo y cerrado cuya lista inicial incluye a Γ, la negación de A (*i.e.*, $\Gamma \cup \{-A\} \vdash \perp$) y la sumatoria del vector de valores v=0. De acuerdo con esta propuesta, a continuación mostramos que el método funciona probando algunas de las inferencias válidas previamente mencionadas (Diags. 5, 6, 7 y 8).



http://dx.doi.org/10.29092/uacm.v16i41.717





Por último, bosquejamos en qué sentido este método de árboles es confiable.

Proposición 1. Toda inferencia NTL válida produce un árbol completo y cerrado con *v*=0.

Para justificar esta proposición consideremos que la estructura de una inferencia NTL válida puede ser de dos formas alternativas (Cuadro 14).

http://dx.doi.org/10.29092/uacm.v16i41.717

	Alternativa 1	Alternativa 2
1.	$-_{n}X\pm_{e}Y$	$-_{n}X\pm_{e}Y$
2.	$-_{m}Z+_{e}X$	$+_{m+n}Z+_{e}X$
⊢	$-_{n+m}Z\pm_{e}Y$	$+_{m}Z\pm_{e}Y$

Cuadro 14. Alternativas

Ahora bien, además de estas dos Alternativas, tenemos que considerar dos casos, uno básico y uno inductivo. Para el caso base consideremos ambas Alternativas. Cuando en la Alternativa 1 tomamos n=m=0 y en la Alternativa 2 tomamos n=0 y m=1, NTL colapsa con TFL, en cuyo caso obtenemos simplemente árboles completos y cerrados de TFL.

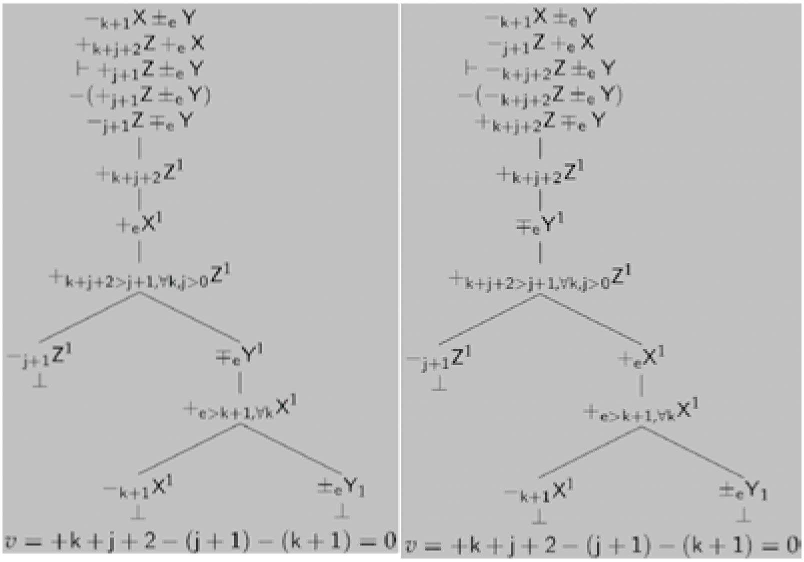
Para el caso inductivo hay que considerar el caso cuando n=k y m=j. En tal caso, las Alternativas obtienen la siguiente estructura (Cuadro 15):

	Alternativa 1'	Alternativa 2'
1.	$-_{k}X\pm_{e}Y$	$-_{k}X\pm_{e}Y$
2.	$-_{j}Z+_{e}X$	$+_{k+j}Z+_{e}X$
⊢	$-_{k+j}Z\pm_{e}Y$	$+_{j}Z\pm_{e}Y$

Cuadro 15. Alternativas del caso inductivo

Es fácil ver que las alternativas 1' y 2' son NTL válidas: en ambos casos *i*) la suma de las premisas es algebraicamente igual a la conclusión, *ii*) el número de conclusiones con cantidad particular (viz., cero o uno) es igual al número de premisas con cantidad particular y *iii*) o bien (a) el valor de una conclusión universal resulta de sumar los valores de las premisas universales (Alternativa 1'); o bien (b) el valor de una conclusión particular resulta de restar el valor de la premisa universal del valor de la premisa particular (Alternativa 2'). Ahora supongamos que estas alternativas también son válidas para n=k+1 y m=j+1 para números arbitrarios k, j>0. Entonces los árboles respectivos lucirían de la siguiente manera (Diagramas 9 y 10):

http://dx.doi.org/10.29092/uacm.v16i41.717



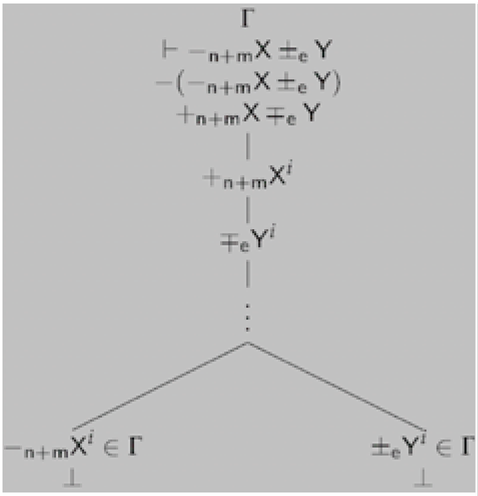
Proposición 2. Toda inferencia que produce un árbol completo y cerrado con v=0 es una inferencia NTL válida.

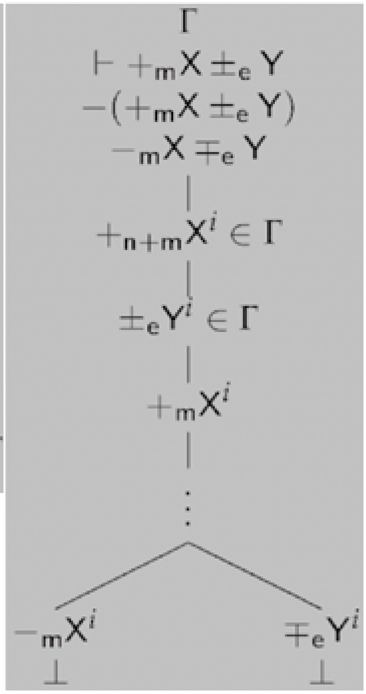
Para justificar esta proposición supongamos que existe una inferencia que produce un árbol completo y cerrado con v=0 pero que no es una inferencia NTL válida. Entonces existe un árbol completo y cerrado con v=0 cuya lista inicial incluye un conjunto de términos, digamos Γ, y la negación de la conclusión y v=0, pero de Γ no podemos construir una prueba de la conclusión usando las condiciones de validez de NTL, es decir, a partir de Γ, o bien la suma de las premisas no es algebraicamente igual a la conclusión, o el número de conclusiones con cantidad particular no es igual al número de premisas con cantidad particular, o bien el valor de una conclusión universal no es igual a la suma de los valores de las premisas universales y el valor de una conclusión particular no es igual a la diferencia de restar el valor de la premisa universal del valor de la premisa particular.

Sin pérdida de generalidad, consideremos las inferencias NTL válidas del Cuadro 14. Entonces tenemos dos Alternativas cuyas conclusiones son, respectivamente, $-_{n+m}Z\pm_e Y$ y $+_m Z\pm_e Y$. Ahora, como el

http://dx.doi.org/10.29092/uacm.v16i41.717

árbol es completo, las reglas para generar dicho árbol deben haber sido aplicadas; y como el árbol es cerrado y v=0, cada árbol debe ser de una de las siguientes siguientes formas (Diags. 11 y 12):





Supongamos, entonces, que tenemos una instancia del árbol del Diagrama 11 pero que su correspondiente inferencia no es válida, es decir, donde $\Gamma^{+}=\Gamma\cup\{+_{n+m}X\mp_{e}Y\}$, $\Gamma^{+}\vdash\perp$, pero la aplicación de las condiciones de inferencia de NTL a Γ no nos permite producir $-_{n+m}X\pm_{e}Y$. Ahora bien, como el árbol del Diagrama 11 es completo, las puntas están cerradas, por lo que en nodos previos el árbol tiene que incluir algo de la forma $-_{m+n}X\pm_{e}Y$ o algo de la forma $-_{m}Z\pm_{e}Y$ y $-_{n}X+_{e}Z$, es decir, $\Gamma=\{-_{m+n}X\pm_{e}Y\}$ o bien $\Gamma=\{\ldots,-_{m}Z\pm_{e}Y, -_{n}X+_{e}Z, \ldots\}$. Pero si esto es así, en cualquiera de los dos casos, si aplicamos la condición *i*) a Γ obtenemos algo de la forma $-X\pm_{e}Y$, y no al revés, por la condición *ii*); y por último, por la condición *iii*) (a), la conclusión tiene que ser algo de la forma $-_{m+n}X\pm_{e}Y$ para que la suma de los valores numéricos sea igual

http://dx.doi.org/10.29092/uacm.v16i41.717

a 0. Pero esto contradice la suposición de que no podemos construir una prueba de tal conclusión usando las condiciones de inferencia de NTL. Lo mismo ocurre, *mutatis mutandis*, para el árbol del Diagrama 12. Así, $\Gamma=\{+_m X \pm_e Y\}$ o bien $\Gamma=\{\ldots,-_n Z \pm_e Y,\ +_{m+n} X +_e Z,\ \ldots\}$. En cualquiera de los dos casos, si aplicamos la condición *i*) a Γ obtenemos algo de la forma $+_m X \pm_e Y$, y no al revés, por la condición *ii*); y por último, por la condición *iii*) (b), la conclusión tiene que ser algo de la forma $+_m X \pm_e Y$. Pero esto contradice la suposición de que no podemos construir una prueba de tal conclusión usando las condiciones de inferencia de NTL.

Conclusiones

En esta contribución hemos intentado ofrecer un método analítico de árboles para el sistema NTL de Murphree. Como consecuencia de esta meta podemos extraer las siguientes observaciones: *a)* el método de árboles que hemos propuesto evita la condición *ii)* de la regla de Sommers para de la silogística básica, a saber, que el número de premisas particulares debe ser igual al número de conclusiones particulares. Esto posibilita la aplicación general del método para cualquier número de premisas mayor o igual a dos. *b)* El método preserva el poder de TFL con respecto a inferencias relacionales, transformaciones de voz activa-pasiva, cambios asociativos y simplificaciones poliádicas, lo cual le da a este procedimiento una ventaja competitiva sobre (los árboles de) la lógica clásica de primer orden. *c)* El método preserva, además, el poder de TFL$^+$ para lidiar con inferencias con cuantificadores no-clásicos subjetivos, lo cual le da una ventaja competitiva no sólo sobre (los árboles de) la lógica clásica de primer orden, sino sobre (los árboles de) TFL y TFL$^+$. *d)* Debido a la peculiar álgebra de TFL, no necesitamos usar reglas de cuantificación ni skolemización, lo cual puede ser útil en relación con la programación lógica y la resolución (Castro-Manzano y Lozano-Cobos, 2018; Castro-Manzano, Lozano-Cobos y Reyes-Cárdenas, 2018). *e)* El número de reglas de inferencia se reduce a un conjunto más pequeño, simple y uniforme de reglas que preserva las capacidades

http://dx.doi.org/10.29092/uacm.v16i41.717

expresivas de TFL, TFL$^+$ y NTL en diferentes contextos inferenciales[9].

Por estas razones, creemos que este método no sólo es novedoso, sino también prometedor, no nada más como otra herramienta didáctica, sino como un dispositivo de investigación. Por ejemplo, consideramos que, por su naturaleza terminista, puede ser útil para modelar razonamiento modal en la medida que puede ser usado para representar la silogística modal, ya que esta es también una lógica de términos (cf. Englebretsen, 1988; Thom, 2012; Rini, 1998; Malink, 2013). También, por su naturaleza numérica, pensamos que puede servir para producir un modelo terminista de la silogística probabilística (cf. Thompson, 1986). Adicionalmente, en tanto que el método es visual, pensamos que encuentra un lugar natural dentro de un proyecto de razonamiento diagramático (cf. Englebretsen, 1991; Englebretsen, 1996).

Por otro lado, consideramos que este método nos podría ayudar a explorar nexos con la psicología, la inteligencia artificial y, por supuesto, la historia y la filosofía de la lógica. Con la psicología, en la medida en que el método puede usarse para aproximar una descripción psicológica más rica del razonamiento en lenguaje natural (cf. Keil, 2005; Khemlani y Johnson-Laird, 2012); con la inteligencia artificial, porque puede utilizarse para adaptar o modificar motores inferenciales para bases de datos aristotélicas (cf. Mozes, 1989; Castro-Manzano y Lozano-Cobos, 2018; Castro-Manzano, Lozano-Cobos y Reyes-Cárdenas, 2018); y con la historia y la filosofía de la lógica en tanto que promueve una revisión de las lógicas de términos (cf. Veatch, 1970; Sommers, 1984; Englebretsen, 1996; Englebretsen y Sayward, 2011) como herramientas que pueden ser más interesantes y poderosas de lo que originalmente podríamos creer (cf. Carnap, 1930; Geach, 1962; Geach, 1980).

Agradecemos a las y los árbitros anónimos por sus precisas correcciones y útiles comentarios, y al Fondo de Investigación UPAEP.

[9] Para el caso proposicional usamos las mismas normas de los árboles para NTL pero suprimimos los subíndices y los superíndices.

http://dx.doi.org/10.29092/uacm.v16i41.717

Bibliografía consultada

Ben-Yami, H. (2014). The quantified argument calculus. En *The Review of Symbolic Logic*. Vol. 7. Núm. 1. pp. 120-146. doi:10.1017/S1755020313000373

Carnap, R. (1930). Die alte und die neue Logik. En *Erkenntnis*. Vol. 1. Núm. 1. pp. 12-26. doi:10.1007/bf00208606

Castro-Manzano, J.M., Lozano-Cobos, L.I. y Reyes-Cárdenas, P.O. (2018). Programming with Term Logic. En *Brain. Broad Research in Artificial Intelligence and Neuroscience*. Vol. 9. Núm. 3.

Castro-Manzano, J.M. y Lozano-Cobos, L.I. (2018). TFLPL: Programación lógica con términos. En *Research in Computing Science*.

Castro-Manzano, J.M. y Reyes-Cárdenas, P.O. (2018). Term Functor Logic Tableaux. En *South American Journal of Logic*. Vol. 4. pp. 1-22.

D'Agostino, M. (2011). *Handbook of tableau methods*. Dordrecht: Springer.

Englebretsen, G. (1987). *The New Syllogistic*. Bern, Suiza: Peter Lang Pub.

Englebretsen, G. (1988). Preliminary notes on a new modal syllogistic. En *Notre Dame Journal of Formal Logic*. Vol. 29. Núm. 3. pp. 381-395. doi:10.1305/ndjfl/1093637935

Englebretsen, G. (1991). Linear diagrams for syllogisms (with relationals). En *Notre Dame Journal of Formal Logic*. Vol. 33. Núm. 1. pp 37-69. doi:10.1305/ndjfl/1093636009

Englebretsen, G. (1996). *Something to Reckon with: The Logic of Terms*. Canadá: University of Ottawa Press.

Englebretsen, G., y Sayward, C. (2011). *Philosophical Logic: An Introduction to Advanced Topics*. Londres: A&C Black.

Geach, P. T. (1962). *Reference and Generality: An Examination of Some Meieval and Modern Theories*. Reino Unido: Cornell University Press.

Geach,P. T. (1980). *Logic Matters*. Oakland, Estados Unidos: University of California Press.

http://dx.doi.org/10.29092/uacm.v16i41.717

Keil, F. (2005). Exploring boundary conditions on the structure of knowledge: Some nonobvious influences of philosophy on psychology. En D.S. Oderberg (ed.). *The Old New Logic: Essays on the Philosophy of Fred Sommers*. Estados Unidos: Cambridge, MA: MIT Press.

Khemlani, S., y Johnson-Laird, P. N. (2012). Theories of the syllogism: A meta-analysis. En *Psychological Bulletin*. Vol. 138. Núm. 3. pp. 427-457. doi:10.1037/a0026841

Kuhn, S. T. (1983). An axiomatization of predicate functor logic. En *Notre Dame Journal of Formal Logic*. Vol. 24. Núm. 2. pp. 233-241. doi:10.1305/ndjfl/1093870313

Lindström, P. (1966). First Order Predicate Logic with Generalized Quantifiers. En *Theoria*. Vol. 32. Núm. 3. pp. 186-195. doi:10.1111/j.1755-2567.1966.tb00600.x

Łukasiewicz, J. (1957). *Aristotle's syllogistic from the standpoint of modern formal logic*. Oxford: Clarendon Press.

Malink, M. (2013). *Aristotle's Modal Syllogistic*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

McCall, S. (1963). *Aristotle's modal syllogisms*. Amsterdam: North-Holland.

Moss, L. (2015). Natural logic. En S. Lappin, S., C. Fox (eds.) *The Handbook of Contemporary Semantic Theory*. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons.

Mostowski, A. (1957). On a generalization of quantifiers. En *Fundamenta Mathematicae*. Vol. 44. Núm. 1. pp. 12-36. doi:10.4064/fm-44-1-12-36

Mozes,E. (1989). A deductive database based on aristotelian logic. En *Journal of Symbolic Computation*. Vol. 7. Núm. 5. pp. 487-507. doi:10.1016/s0747-7171(89)80030-6

Murphree, W.A. (1991). *Numerically Exceptive Logic: A Reduction of the Classical Syllogism*. Bern, Suiza: Peter Lang Pub.

Murphree, W.A. (1998). Numerical Term Logic. En *Notre Dame Journal of Formal Logic*. Vol. 39. Núm. 3. pp. 346-362. doi:10.1305/ndjfl/1039182251

http://dx.doi.org/10.29092/uacm.v16i41.717

Noah, A.A. (1980). Predicate-functors and the limits of decidability in logic. *En Notre Dame Journal of Formal Logic.* Vol. 21. Núm. 4. pp 701-707. doi:10.1305/ndjfl/1093883255

Noah, A.A. (2005). Sommers's cancellation technique and the method of resolution. En D.S. Oderberg (ed.). *The Old New Logic: Essays on the Philosophy of Fred Sommers.* Cambridge, MA: MIT Press.

Peterson, P.L. (1979). On the logic of ``few”, ``many”, and ``most”. En *Notre Dame Journal of Formal Logic.* Vol. 20. Núm. 1. 155-179. doi:10.1305/ndjfl/1093882414

Priest, G. (2008). *An Introduction to Non-Classical Logic: From If to Is.* Cambridge, Reino Unido: Cambridge University Press.

Quine, W.V.O. (1971). Predicate functor logic. En J. E. Fenstad (ed.) *Proceedings of the Second Scandinavian Logic Symposium.* Amsterdam: North-Holland.

Rini, A.A. (1998). Is There a Modal Syllogistic? En *Notre Dame Journal of Formal Logic.* Vol. 39 Núm. 4. pp. 554-572. doi:10.1305/ndjfl/1039118870

Szabolcsi, L. (2008). *Numerical Term Logic.* Edwin Mellen Press.

Sommers, F. (1967). On a Fregean Dogma. En *Problems in the Philosophy of Mathematics.* pp. 47-81. doi:10.1016/s0049-237x(08)71521-0

Sommers, F. (1984). *The Logic of Natural Language.* Nueva York: Oxford University Press.

Sommers, F. (2005). Intelectual Autobiography. En D.S. Oderberg (ed.), The Old New Logic: *Essays on the Philosophy of Fred Sommers.* Cambridge: MIT Press.

Sommers, F., y Englebretsen,G. (2017). *An Invitation to Formal Reasoning: the Logic of Terms.* Londres: Routledge.

Striker, G. (1994). Assertoric vs. Modal Syllogistic. En *Ancient Philosophy.* Vol. 14. Núm. 9999. pp. 39-51. doi:10.5840/ancientphil199414specialissue76

Thom, P. (2012). *The Logic of Essentialism: An Interpretation of Aristotle's Modal Syllogistic.* Berlin, Alemania: Springer Science & Business Media.

Thompson, B. (1982). Syllogisms using ``few”, ``many”, and ``most”. En *Notre Dame Journal of Formal Logic.* Vol. 23. Núm. 1. pp. 75-84. doi:10.1305/ndjfl/1093883568

http://dx.doi.org/10.29092/uacm.v16i41.717

Thompson, B. E. (1986). Syllogisms with statistical quantifiers. En *Notre Dame Journal of Formal Logic*. Vol. 27. Núm. 1. pp. 93-103. doi:10.1305/ndjfl/1093636527

Veatch, H. B. (1970). *Intentional logic: a logic based on philosophical realism.* Estados Unidos: Archon Books.

Westerståhl, D. (1989). Aristotelian syllogisms and generalized quantifiers. En *Studia Logica*. Vol. 48. Núm. 4. pp. 577-585. doi:10.1007/bf00370209

Fecha de recepción: 13 de abril de 2019
Fecha de aceptación: 26 de junio de 2019

http://dx.doi.org/10.29092/uacm.v16i41.717